CH 14 : SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

****

I. QUANTITE DE MOUVEMENT TOTALE

Soit (S) un système de n particules de masse m_i, de quantité de mouvement $\vec{p}_i$, dans un référentiel (R) ; la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$$

Rq : $\vec{p}$ est aussi appelée « **résultante cinétique** » du système (S).

II. CENTRE D'INERTIE

• Le centre d'inertie du système (S) est un point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Rq : en prenant pour origine le point G, il vient : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$

• Posons $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, et dérivons la relation précédente par rapport au temps :

$$m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \Rightarrow m\vec{v}_G=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \quad \text{ou :} \quad \boxed{\vec{p}=m\vec{v}_G} \quad (1)$$

Rq : la résultante cinétique est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel fictif, confondu avec G et affecté de toute la masse du système.

III. REFERENTIEL BARYCENTRIQUE OU DU CENTRE DE MASSE

III.1. DEFINITION

Le référentiel barycentrique (R*) du système (S), relativement au référentiel (R), est animé par rapport à (R) d'un mouvement de **translation** de vitesse $\vec{v}_G(t)$ et a pour origine G.

III.2. PROPRIETE

D'après la relation (1), on a dans (R*) : $\vec{v}_G^{\,*}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p}^{\,*}=\vec{0}}$

Rq : cette propriété ne suffit pas à définir (R*), car pour un référentiel (où G serait fixe) en rotation par rapport à (R), on aurait également $\vec{p}^{\,*}=\vec{0}$.

IV. MOMENT CINETIQUE TOTAL

IV.1. DEFINITION

Pour le système (S), dans le référentiel (R), par rapport à un point O quelconque, on définit le moment cinétique total par :

$$\boxed{\vec{\sigma}_{o/R}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i}$$

IV.2. MOMENT CINETIQUE BARYCENTRIQUE

• Le moment cinétique barycentrique s'écrit : $\vec{\sigma}_o^{\,*}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i^{\,*}$

• Montrons que ce moment cinétique est **indépendant du point O** choisi ; on a :

$$\vec{\sigma}_{o'}^{\,*}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{O'M_i}\wedge\vec{p}_i^{\,*}=\vec{\sigma}_o^{\,*}+\overrightarrow{O'O}\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^{\,*}\right) \; ; \; \text{or :} \; \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i^{\,*}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_{o'}^{\,*}=\vec{\sigma}_o^{\,*}=\vec{\sigma}^{\,*}}$$

Rq : il est souvent commode de prendre le G comme origine ⇒ dans ce cas : $\boxed{\vec{\sigma}^{\,*}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GM_i}\wedge\vec{p}_i^{\,*}}$

IV.3. PREMIER THEOREME DE KÖNIG

Nous allons relier le moment cinétique dans le référentiel (R) au moment cinétique barycentrique , soit :

$$\vec{\sigma}_{o/R}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i(\vec{v}_G+\vec{v}_i^{\,*})=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\wedge m_i\vec{v}_i^{\,*}+\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{v}_G \Rightarrow$$

puisque $m\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{OM_i}$: $\boxed{\vec{\sigma}_{o/R}=\vec{\sigma}^{\,*}+m\overrightarrow{OG}\wedge\vec{v}_G=\vec{\sigma}^{\,*}+\overrightarrow{OG}\wedge\vec{p}}$

Rq1 : le moment cinétique du système dans (R) est donc égal au moment cinétique barycentrique augmenté de celui d'un point matériel fictif, coïncidant avec G, affecté de toute la masse du système.

Rq2 : il est à remarquer que la forme « simple » du théorème ci-dessus est liée à l'expression de la loi de composition galiléenne des vitesses pour une **translation**.

V. THEOREME DE LA RESULTANTE CINETIQUE

V.1. ENONCE DU THEOREME

• Soit un référentiel (R) ; appliquons la RFD (relation fondamentale de la dynamique) à chaque particule i d'un système (S), il vient :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i} \quad \text{où :} \begin{cases} \vec{f}_i^{\,ext} = \text{résultante des forces extérieures à (S) s'exerçant sur la particule i} \\ \vec{f}_{j/i} = \text{force exercée par la particule j sur la particule i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i}\right)$$

• Or, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on a :

$$\vec{f}_{j/i} + \vec{f}_{i/j} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i}\right) = \vec{0}$$; il vient alors :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{\,ext} = \vec{F}^{ext} = m\vec{a}_G} \qquad \text{(si m = cste)}$$

Rq : si le référentiel (R) n'est **pas galiléen**, il faut bien sûr prendre en compte les **forces d'inertie** dans l'expression de la résultante des forces extérieures.

V.2. CAS D'UN SYSTEME ISOLE

Dans ce cas : $\vec{F}^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \overrightarrow{cste}}$ et : $\boxed{\vec{v}_G = \overrightarrow{cste}}$

Rq : il y a alors **conservation de la quantité de mouvement** du système et le mouvement du centre d'inertie est une **translation rectiligne uniforme** (« TRU »).

VI. THEOREMES DU MOMENT CINETIQUE

VI.1. EXPRESSION DANS UN REFERENTIEL QUELCONQUE

• Considérons un <u>point O **FIXE**</u> dans le référentiel d'étude (R), on peut écrire pour chaque particule i :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{o,i}}{dt}\right|_R = \overrightarrow{OM}_i \wedge \left(\vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i}\right) \Rightarrow \left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_R = \sum_{i=1}^{n}\left[\overrightarrow{OM}_i \wedge \left(\vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i}\right)\right]$$

• Dans la somme $\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{OM}_i \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j/i}\right)$, considérons les termes en $\overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_{j/i} + \overrightarrow{OM}_j \wedge \vec{f}_{i/j}$; on a :

$$\vec{f}_{j/i} = -\vec{f}_{i/j} \Rightarrow \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_{j/i} + \overrightarrow{OM}_j \wedge \vec{f}_{i/j} = (\overrightarrow{OM}_i - \overrightarrow{OM}_j) \wedge \vec{f}_{j/i} = \overrightarrow{M_jM_i} \wedge \vec{f}_{j/i} = \vec{0}$$

(colinéarité de $\overrightarrow{M_jM_i}$ et $\vec{f}_{j/i}$ pour 2 points matériels i et j) ; il vient alors :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_R = \sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{f}_i^{\,ext}\right) = \vec{M}_o^{\,ext}}$$ (moment résultant en O des forces extérieures agissant sur (S))

Rq : si le référentiel (R) n'est **pas galiléen**, il faut tenir compte du **moment des forces d'inertie** dans l'expression du théorème précédent.

VI.2. EXPRESSION DANS LE REFERENTIEL BARYCENTRIQUE

Appliquons le théorème précédent en G, toujours dans le référentiel (R) : $\frac{d\vec{\sigma}_{G/R}}{dt} = \vec{M}_G^{\,ext}$

Or, puisque (R*) est en **translation** par rapport à (R), on a : $\left.\frac{d}{dt}\right|_{R^*} = \left.\frac{d}{dt}\right|_R \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt}\right|_{R^*} = \vec{M}_G^{\,ext}}$

Rq : cette dernière expression ressemble à celle du paragraphe précédent, mais elle est, en fait, **plus simple** : en effet, même si (R*) **n'est pas galiléen**, elle s'applique **sans tenir compte des forces d'inertie** ; de plus, le calcul de $\vec{\sigma}^*$ est souvent plus aisé car il ne dépend pas du point d'application.

VI.3. CAS D'UN SYSTEME ISOLE

On a alors : $\vec{M}_o^{\,ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\sigma}_{o/R} = \overrightarrow{cste}}$

Cette relation traduit la **conservation** du moment cinétique ; elle est en général très pratique pour les calculs, car elle ne fait intervenir (comme la conservation de la quantité de mouvement) que des dérivées **premières** du vecteur position : ce type de relation est appelé « **intégrale première du mouvement** ».

VII. ENERGIE CINETIQUE D'UN SYSTEME DE PARTICULES

VII.1. EXPRESSION DE L'ENERGIE

Dans un référentiel (R) quelconque, on a : $\boxed{E_{C/R} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2}$

VII.2. DEUXIEME THEOREME DE KÖNIG

Puisque (R*) est en translation par rapport à (R), on peut écrire :

$$\vec{v}_{i/R} = \vec{v}_i^* + \vec{v}_{G/R} \Rightarrow E_C = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i^* + \vec{v}_{G/R})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^{*2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\vec{v}_{G/R}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i^*\right)\cdot\vec{v}_G$$

Or : $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i^* = \vec{p}^* = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{C/R} = E_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2}$

Rq : ce théorème sera d'une grande utilité en mécanique du solide ; il exprime le fait que l'énergie cinétique d'un système dans un référentiel (R) est égal à la somme de l'énergie cinétique barycentrique et de l'énergie cinétique d'un point matériel coïncidant avec G, affecté de toute la masse du système.

VII.3. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

• Dans un référentiel (R) et avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j/i}$; on multiplie par $\vec{v}_i$ et on somme sur i :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i/R} \cdot \frac{d\vec{v}_{i/R}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{\,ext} \cdot \vec{v}_{i/R} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{j/i} \cdot \vec{v}_i \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE_{C/R}}{dt} = P_{ext} + P_{\text{int}}}$$

où : P_{ext} = puissance des forces **extérieures** au système et P_{int} = puissance des forces **intérieures** au système.

• Par intégration temporelle, il vient : $\boxed{\Delta E_{C/R} = W_{ext} + W_{\text{int}}}$

Rq : on peut exprimer le travail mis en jeu par un couple de particules i et j, soit :

$$\delta W_{ij} = \vec{f}_{j/i} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{i/j} \cdot d\vec{r}_j = \vec{f}_{i/j} \cdot (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{f}_{i/j} \cdot d\vec{r}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{f}_{i/j} \cdot d\vec{r}_{ij}}$$

$\Rightarrow$ pour un système **indéformable** (**SOLIDE**) où $d\vec{r}_{ij} = \vec{0}$, le travail des forces **intérieures** au système est **NUL**.

VIII. ENERGIE MECANIQUE

VIII.1. ENERGIE POTENTIELLE

• Pour des forces **conservatives**, on sait que l'on peut écrire :

$dE_P = \delta W_{op} = -\delta W_{\vec{f}}$, où δW_{op} est le travail d'un opérateur « luttant » contre la force $\vec{f}$ $\Rightarrow$

après intégration entre deux états (1) et (2) : $\boxed{\Delta E_P = E_{P2} - E_{P1} = W_{op}(1 \to 2) = -W_{\vec{f}}(1 \to 2)}$

• Pour des forces d'interaction au sein d'un système de particules, on a pour le couple (i,j) :

$\delta W_{ij} = \vec{f}_{i/j} \cdot d\vec{r}_{ij} = -dE_{Pij}$ où E_{Pij} = « énergie potentielle d'interaction des particules i et j ».

On pose : $\boxed{E_P = \dfrac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{Pij}}$ = « énergie potentielle d'interaction du système de particules »

Rq : E_P ne dépend que des $\vec{r}_{ij}$ $\Rightarrow$ l'énergie potentielle d'interaction est **indépendante de (R)**.

VIII.2. CAS OU TOUTES LES FORCES SONT CONSERVATIVES

• Le TEC donne ici : $\Delta E_C = -\Delta E_P$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta E_{méca} = 0}$ où : $\boxed{E_{méca} = E_C + E_P}$ = énergie **mécanique** du système de particules.

• S'il existe des forces non conservatives, alors l'énergie mécanique du système n'est pas constante ; pour retrouver une grandeur énergétique éventuellement conservative, nous serons amenés à définir une « **énergie interne** » : le lien entre ces différentes grandeurs et les transferts thermiques sera donné par le « **premier principe de la thermodynamique** ».